練習問題 2-A

1.

（１）特性方程式$\lambda^2-2\lambda-4=0$を解くと

$$\lambda=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot(-4)}$$
$$=1\pm\sqrt{5}$$

よって，一般解は

$$\boldsymbol{x=C_1e^{(1+\sqrt{5})t}+C_2e^{(1-\sqrt{5})t}}$$ **（C_1，C_2は任意定数）**

（２）特性方程式$\lambda^2-8\lambda+16=0$を解くと

$$(\lambda-4)^2=0$$

$\lambda=4$（２重解）

よって，一般解は

$$\boldsymbol{x=(C_1+C_2t)C_2e^{4t}}$$ **（C_1，C_2は任意定数）**

（３）特性方程式$\lambda^2-3\lambda-4=0$を解くと

$$(\lambda+1)(\lambda-3)=0$$

$\lambda=-1$，４

よって，一般解は

$$\boldsymbol{x=C_1e^{-t}+C_2e^{4t}}$$ **（C_1，C_2は任意定数）**

（４）特性方程式$\lambda^2-4+7=0$を解くと

$$\lambda=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot7}$$
$$=2\pm\sqrt{-3}$$
$$=2\pm\sqrt{3}i$$

よって，一般解は

$$\boldsymbol{x=e^{2t}\left(C_1\cos\sqrt{3}t+C_2\sin\sqrt{3}t\right)}$$

（C_1，C_2は任意定数）

2.

（１）特性方程式$\lambda^2+3\lambda+2=0$を解くと

$$(\lambda+1)(\lambda+2)=0$$

$\lambda=-1$，-2

よって，斉次方程式の一般解は

$x=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$（C_1，C_2は任意定数）

与えられた微分方程式の１つの解を

$x=At^2+Bt+C$と予想する．

予想した解をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt}=2At+B$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2A$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$2A+3(2At+B)+2(At^2+Bt+C)=t^2-t$$
$$2A+6At+3B+2At^2+2Bt+2C=t^2-t$$
$$2At^2+(6A+2B)t+(2A+3B+2C)=t^2-t$$

よって

$$\begin{cases}2A=1\\6A+2B=-1\\2A+3B+2C=0\end{cases}$$

これを解いて，$A=\dfrac{1}{2}$，$B=-2$，$C=\dfrac{5}{2}$

したがって，１つの解は

$$x=\frac{1}{2}t^2-2t+\frac{5}{2}$$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{2}t^2-2t+\frac{5}{2}+C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}}$$

（C_1，C_2は任意定数）

（２）特性方程式$\lambda^2+4\lambda+4=0$を解くと

$$(\lambda+2)^2=0$$

$\lambda=-2$（２重解）

よって，斉次方程式の一般解は

$x=(C_1+C_2t)e^{-2t}$（C_1，C_2は任意定数）

与えられた微分方程式の１つの解を$x=Ae^{2t}$と予想する．予想した解をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt}=2Ae^{2t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=4Ae^{2t}$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$4Ae^{2t}+4\cdot2Ae^{2t}+4Ae^{2t}=e^{2t}$$
$$16Ae^{2t}=e^{2t}$$

よって，$A=\dfrac{1}{16}$

したがって，１つの解は

$$x=\frac{1}{16}e^{2t}$$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{16}e^{2t}+(C_1+C_2t)e^{-2t}}$$ **（C_1，C_2は任意定数）**

（３）特性方程式$\lambda^2-2\lambda-3=0$を解くと

$(\lambda+1)(\lambda-3)=0$

$\lambda=-1,\ 3$

よって，斉次方程式の一般解は

$x=C_1e^{-t}+C_2e^{3t}$（C_1，C_2は任意定数）

与えられた微分方程式の１つの解を$x=Ae^t$と予想する．予想した解をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt}=Ae^t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=Ae^t$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$Ae^t-2Ae^t-3Ae^t=e^t$

$-4Ae^t=e^t$

よって，$A=-\frac{1}{4}$

したがって，１つの解は

$$x=-\frac{1}{4}e^t$$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x=-\frac{1}{4}e^t+C_1e^{-t}+C_2e^{3t}}$$ **（C_1，C_2は任意定数）**

（４）特性方程式$\lambda^2+2\lambda-3=0$を解くと

$(\lambda-1)(\lambda+3)=0$

$\lambda=1,\ -3$

よって，斉次方程式の一般解は

$x=C_1e^t+C_2e^{-3t}$（C_1，C_2は任意定数）

与えられた微分方程式の１つの解を

$x=A\cos 2t+B\sin 2t$と予想する．

予想した解をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt}=-2A\sin 2t+2B\cos 2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-4A\cos 2t-4B\sin 2t$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$-4A\cos 2t-4B\sin 2t+2(-2A\sin 2t+2B\cos 2t)$$
$$-3(A\cos 2t+B\sin 2t)=\cos 2t$$

$$(-4A+4B-3A)\cos 2t$$
$$+(-4B-4A-3B)\sin 2t=\cos 2t$$

$$(-7A+4B)\cos 2t+(-4A-7B)\sin 2t=\cos 2t$$

よって

$$\begin{cases}-7A+4B=1\\-4A-7B=0\end{cases}$$

これを解いて，$A=-\frac{7}{65}$，$B=\frac{4}{65}$

したがって，１つの解は

$$x=-\frac{7}{65}\cos 2t+\frac{4}{65}\sin 2t$$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x=-\frac{7}{65}\cos 2t+\frac{4}{65}\sin 2t+C_1e^t+C_2e^{-3t}}$$

（C_1，C_2は任意定数）

3.

２式を上から①，②とする．

①より，$y=-\frac{dx}{dt}+x+t^2$・・・①′

①’をtで微分すると

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+2t$$

これらを②に代入すると

$$-\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+2t=2x-\left(-\frac{dx}{dt}+x+t^2\right)+t^2-t$$

整理すると，$\frac{d^2x}{dt^2}+x=3t$・・・③

③の特性方程式$\lambda^2+1=0$を解くと，$\lambda=\pm i$

よって，一般解は

$x=C_1\cos t+C_2\sin t$（C_1，C_2は任意定数）

③の１つの解を，$x=At+B$と予想する．

予想した解をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt}=A$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

これらを，③に代入すると

$At+B=3t$

よって，$A=3$，$B=0$

したがって，$x=3t$

以上より，xの一般解は

$x = 3t + C_1 \cos t + C_2 \sin t$

これより

$$\frac{dx}{dt} = 3 - C_1 \sin t + C_2 \cos t$$

これらを，①'に代入して

$$y = -(3 - C_1 \sin t + C_2 \cos t) + (3t + C_1 \cos t + C_2 \sin t) + t^2$$

$$= t^2 + 3t - 3 + (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t$$

よって

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 3t + C_1 \cos t + C_2 \sin t} \\ \boldsymbol{y = t^2 + 3t - 3 + (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t} \end{cases}$$

（C_1，C_2は任意定数）

4.

（１）x_1は，$L(x) = 3t$の解なので

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} - 4\frac{dx_1}{dt} + 3x_1 = 3t$$

また，x_2は，$L(x) = \sin t$の解なので

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} - 4\frac{dx_2}{dt} + 3x_2 = \sin t$$

よって

$$L(x_1 + x_2) = \frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) - 4\frac{d}{dt}(x_1 + x_2) + 3(x_1 + x_2)$$

$$= \frac{d^2x_1}{dt^2} - 4\frac{dx_1}{dt} + 3x_1 + \frac{d^2x_2}{dt^2} - 4\frac{dx_2}{dt} + 3x_2$$

$$= 3t + \sin t$$

したがって，$x_1 + x_2$は，$L(x) = 3t + \sin t$の１つの解である．

（２）$L(x) = 3t + \sin t$の特性方程式$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$を解くと，$(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$より，$\lambda = 1$，$3$であるから，斉次の場合の一般解は

$x = C_1 e^t + C_2 e^{3t}$（C_1，C_2は任意定数）

$L(x) = 3t$の１つの解を，$x_1 = At + B$と予想する．

予想した解をtで微分すると

$$\frac{dx_1}{dt} = A$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 0$$

これらを微分方程式に代入すると

$$0 - 4A + 3(At + B) = 3t$$

$$3At + (-4A + 3B) = 3t$$

よって

$$\begin{cases} 3A = 3 \\ -4A + 3B = 0 \end{cases}$$

これを，$A = 1$，$B = \dfrac{4}{3}$

したがって，$x_1 = t + \dfrac{4}{3}$

$L(x) = \sin t$の１つの解を，$x_2 = A\cos t + B\sin t$と予想する．

$$\frac{dx_2}{dt} = -A\sin t + B\cos t$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -A\cos t - B\sin t$$

これらを方程式に代入すると

$$-A\cos t - B\sin t - 4(-A\sin t + B\cos t) + 3(A\cos t + B\sin t) = \sin t$$

$$(-A - 4B + 3A)\cos t + (-B + 4A + 3B)\sin t = \sin t$$

$$(2A - 4B)\cos t + (4A + 2B)\sin t = \sin t$$

よって

$$\begin{cases} 2A - 4B = 0 \\ 4A + 2B = 1 \end{cases}$$

これを解いて，$A = \dfrac{1}{5}$，$B = \dfrac{1}{10}$

したがって，$x_2 = \dfrac{1}{5}\cos t + \dfrac{1}{10}\sin t$

以上より

$$\boldsymbol{x} = x_1 + x_2 + C_1 e^t + C_1 e^{3t}$$

$$\boldsymbol{= t + \frac{4}{3} + \frac{1}{5}\cos t + \frac{1}{10}\sin t + C_1 e^t + C_1 e^{3t}}$$

（C_1，C_2は任意定数）

5.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

特性方程式$\lambda^2 + \dfrac{k}{m} = 0$ を解くと，$\dfrac{k}{m} > 0$ であるから，

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,i$$

よって，一般解は

$$x = C_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \cdot\cdot\cdot ①$$

（C_1，C_2は任意定数）

これより

$$\frac{dx}{dt} = -C_1\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \cdot\cdot\cdot ②$$

①に，$t=0$，$x=0$を代入して

$0 = -C_1\cos 0 + C_2\sin 0$，すなわち，$C_1 = 0$

②に，$t=0$，$\dfrac{dx}{dt} = v_0$を代入して

$$v_0 = -C_1\sqrt{\frac{k}{m}}\sin 0 + C_2\sqrt{\frac{k}{m}}\cos 0$$

$v_0 = C_2\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，すなわち，$C_2 = \sqrt{\dfrac{m}{k}}v_0$

以上より，$\boldsymbol{x = \sqrt{\dfrac{m}{k}}v_0 \sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)}$

練習問題 2-B

1.

（１）特性方程式$\lambda^2 + 1 = 0$を解くと

$\lambda = \pm i$

よって，斉次の場合の一般解は

$x = C_1\cos t + C_2\sin t$（$C_1$，$C_2$は任意定数）

与えられた微分方程式の１つの解を

$x = A\cos(2t+1) + B\sin(2t+1)$と予想する．

予想した解をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt} = -2A\sin(2t+1) + 2B\cos(2t+1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4A\cos(2t+1) - 4B\sin(2t+1)$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$-4A\cos(2t+1) - 4B\sin(2t+1)$$
$$+A\cos(2t+1) + B\sin(2t+1) = \sin(2t+1)$$
$$-3A\cos(2t+1) - 3B\sin(2t+1) = \sin(2t+1)$$

よって，$-3A = 0$，$-3B = 1$であるから，

$A = 0$，$B = -\dfrac{1}{3}$

したがって，１つの解は

$$x = -\frac{1}{3}\sin(2t+1)$$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x = -\frac{1}{3}\sin(2t+1) + C_1\cos t + C_2\sin t}$$

（C_1，C_2は任意定数）

（２）特性方程式$\lambda^2 - 1 = 0$を解くと，$\lambda = \pm 1$であるから，

斉次の場合の一般解は

$x = C_1e^t + C_2e^{-t}$（C_1，C_2は任意定数）

与えられた微分方程式の１つの解を$x = Ae^{2t+1}$と予想する．予想した解をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt} = 2Ae^{2t+1}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4Ae^{2t+1}$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$4Ae^{2t+1} - Ae^{2t+1} = e^{2t+1}$$
$$3Ae^{2t+1} = e^{2t+1}$$

よって，$3A = 1$であるから，$A = \dfrac{1}{3}$

したがって，１つの解は

$$x = \frac{1}{3}e^{2t+1}$$

以上より，求める一般解は

$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{3}e^{2t+1} + C_1e^t + C_2e^{-t}}$**（$C_1$，$C_2$は任意定数）**

（３）特性方程式$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$を解くと

$(\lambda-2)^2 = 0$より，$\lambda = 2$（２重解）

よって，斉次の場合の一般解は

$x = (C_1 + C_2t)e^{2t}$（C_1，C_2は任意定数）

$\dfrac{d^2x}{dt^2} - 4\dfrac{dx}{dt} + 4x = e^t \cdot\cdot\cdot ①$の１つの解を求める．

①の１つの解を，$x = Ae^t$と予想し，tで微分すると

$$\frac{dx}{dt} = Ae^t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = Ae^t$$

よって，①に代入すると

$$Ae^t - 4Ae^t + 4Ae^t = e^t$$
$$Ae^t = e^t$$

よって，$A = 1$

したがって，①の１つの解は

$x = e^t$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}-4\dfrac{dx}{dt}+4x=\sin t$ ・・・②の１つの解を求める.

②の１つの解を，$x=A\cos t+B\sin t$と予想する.

予想した解をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt}=-A\sin t+B\cos t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-A\cos t-B\sin t$$

これらを方程式に代入すると

$$-A\cos t-B\sin t-4(-A\sin t+B\cos t)$$
$$+4(A\cos t+B\sin t)=\sin t$$
$$(-A-4B+4A)\cos t+(-B+4A+4B)\sin t=\sin t$$
$$(3A-4B)\cos t+(4A+3B)\sin t=\sin t$$

よって

$$\begin{cases}3A-4B=0\\4A+3B=1\end{cases}$$

これを解いて，$A=\dfrac{4}{25}$，$B=\dfrac{3}{25}$

したがって，②の１つの解は，$x=\dfrac{4}{25}\cos t+\dfrac{3}{25}\sin t$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x=e^t+\frac{4}{25}\cos t+\frac{3}{25}\sin t+(C_1+C_2t)e^{2t}}$$

（C_1，C_2は任意定数）

2.

$$\frac{dx}{dt}=A\cos t+\{-(At+B)\sin t\}$$
$$+C\sin t+(Ct+D)\cos t$$
$$=(Ct+A+D)\cos t+(-At-B+C)\sin t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=C\cos t+\{-(Ct+A+D)\sin t\}$$
$$+(-A\sin t)+(-At-B+C)\cos t$$
$$=(-At-B+2C)\cos t+(-Ct-2A-D)\sin t$$

これらを， 与えられた微分方程式に代入すると

$$(-At-B+2C)\cos t+(-Ct-2A-D)\sin t$$
$$+2\{(At+B)\cos t+(Ct+D)\sin t\}=t\cos t$$
$$(-At-B+2C)\cos t+(-Ct-2A-D)\sin t$$
$$+(2At+2B)\cos t+(2Ct+2D)\sin t=t\cos t$$
$$(At+B+2C)\cos t+(Ct-2A+D)\sin t=t\cos t$$

よって，$At+B+2C=t$より，

$$\begin{cases}A=1\\B+2C=0\end{cases}$$

また，$Ct-2A+D=0$より

$$\begin{cases}C=0\\-2A+D=0i\end{cases}$$

したがって

$$\begin{cases}A=1\\B+2C=0\\C=0\\-2A+D=0\end{cases}$$

これを解いて，$A=1$，$B=0$，$C=0$，$D=2$

よって，求める解は

$$\boldsymbol{x=t\cos t+2\sin t}$$

（２）特性方程式$\lambda^2+2=0$を解くと，$\lambda=\pm\sqrt{2}i$であるから，

斉次の場合の一般解は

$x=C_1\cos\sqrt{2}t+C_2\sin\sqrt{2}t$（$C_1$，$C_2$は任意定数）

よって，与えられた微分方程式の一般解は

$$\boldsymbol{x=t\cos t+2\sin t+C_1\cos\sqrt{2}t+C_2\sin\sqrt{2}t}$$

（C_1，C_2は任意定数）

3.

$$\frac{dx}{dt}=(2At+B)e^t+(At^2+Bt)e^t$$
$$=\{At^2+(2A+B)t+B\}e^t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=(2At+2A+B)e^t+\{At^2+(2A+B)t+B\}e^t$$
$$=\{At^2+(4A+B)t+2A+2B\}e^t$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$\{At^2+(4A+B)t+2A+2B\}e^t$$
$$-4\{At^2+(2A+B)t+B\}e^t+3(At^2+Bt)e^t=te^t$$
$$-4Ate^t+2A-2B=te^t$$

よって

$$\begin{cases}-4A=1\\2A-2B=0\end{cases}$$

これを解いて，$A=-\dfrac{1}{4}$，$B=-\dfrac{1}{4}$

よって， １つの解は， $\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{4}(t^2+t)e^t}$

（２）特性方程式$\lambda^2-4\lambda+3=0$を解くと

$(\lambda-1)(\lambda-3)=0$より，$\lambda=1$，3であるから，

斉次の場合の一般解は

$x=C_1e^t+C_2e^{3t}$（C_1，C_2は任意定数）

よって，与えられた微分方程式の一般解は

$$\boldsymbol{x=-\frac{1}{4}(t^2+t)e^t+C_1e^t+C_2e^{3t}}$$

（C_1，C_2は任意定数）

4.

（１）$u=\log t$より，$t=e^u$，$\dfrac{du}{dt}=\dfrac{1}{t}$

また

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{du}\frac{du}{dt}=\frac{1}{t}\frac{dx}{du}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{1}{t^2}\frac{dx}{du}+\frac{1}{t}\frac{d^2x}{du^2}\frac{du}{dt}$$

$$=-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^2}\frac{d^2x}{du^2}$$

$$=\frac{1}{t^2}\frac{d^2x}{du^2}-\frac{1}{t^2}$$

これらを与えられた方程式に代入すると

$$t^2\left(\frac{1}{t^2}\frac{d^2x}{du^2}-\frac{1}{t^2}\frac{dx}{du}\right)+at\left(\frac{1}{t}\frac{dx}{du}\right)+bx=R(e^u)$$

$$\frac{d^2x}{du^2}-\frac{dx}{du}+a\frac{dx}{du}+bx=R(e^u)$$

$$\frac{d^2x}{du^2}+(a-1)\frac{dx}{du}+bx=R(e^u)$$

これは，定数係数の２階線形微分方程式である．

（２）（１）において，$a=1$，$b=-1$，$R(t)=8t^3$

であるから，$u=\log t$とすれば，与えられた

微分方程式は

$$\frac{d^2x}{du^2}+(1-1)\frac{dx}{du}-1\cdot x=8(e^u)^3$$

$$\frac{d^2x}{du^2}-x=8e^{3u}\ \cdot\cdot\cdot①$$

特性方程式$\lambda^2-1=0$を解くと，$\lambda=\pm1$であるから，

斉次の場合の一般解は

$x=C_1e^u+C_2e^{-u}$（C_1，C_2は任意定数）

①の１つの解を，$x=Ae^{3u}$と予想する．

予想した解をtで微分すると

$$\frac{dx}{dt}=3Ae^{3u}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=9Ae^{3u}$$

これらを，①に代入すると

$9Ae^{3u}-Ae^{3u}=8e^{3u}$

$8Ae^{3u}=8e^{3u}$

よって，$8A=8$であるから，$A=1$

したがって，１つの解は，$x=e^{3u}$

以上より，①の一般解は

$x=e^{3u}+C_1e^u+C_2e^{-u}$であるから，求める一般解は

$\boldsymbol{x}=e^{3\log t}+C_1e^{\log t}+C_2e^{-\log t}$

$\quad=e^{\log t^3}+C_1e^{\log t}+C_2e^{-\log t}$

$\quad=t^3+C_1t+C_2t^{-1}$

$$\boldsymbol{=t^3+C_1t+\frac{C_2}{t}}$$ **（C_1，C_2は任意定数）**